

# 随机动力系统中的广义密度演化方程\*

李 杰 陈建兵

同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092

**摘要** 针对一般随机动力系统, 考察了概率守恒原理. 在考虑随机场与随机过程分解的意义上, 探讨了同时含有初始条件随机性、外部激励随机性和系统参数随机性的随机动力系统概率守恒原理. 通过与连续介质力学中的 Euler 系统描述与 Lagrange 系统描述的比拟, 深入讨论了概率守恒原理的状态空间描述与随机事件描述. 特别是在随机事件描述的基础上, 导出了适用于随机动力系统的广义密度演化方程. 在此基础上, 发展了密度演化理论的分析方法, 使得范围广泛的多维随机动力系统的求解问题迎刃而解. 以非线性随机结构的动力响应分析为对象, 示例了密度演化理论的实际应用.

**关键词** 随机动力系统 概率守恒原理 Liouville 方程 广义密度演化方程 随机结构

随机动力系统分析在物理学、气象学、金融学、结构与机械系统分析等领域中都是重要而困难的理论课题<sup>[1-3]</sup>. 在这些领域中, 系统中的随机性可能来自初始条件的不确定性, 也可能包括外部激励和系统参数的变异性. 由于系统中出现的各种随机性, 系统的响应和性态将是随机变量、随机过程或随机场, 因而, 要从样本轨道的角度对系统进行精确的把握, 往往是困难甚至是不可能的. 而从统计系综的角度, 即从系统响应或指标的概率特性特别是概率分布角度进行考察, 所获得的信息则常常清晰而准确, 在大部分情况下, 也是足够的. 这一思路最早在统计力学中获得发展<sup>[1]</sup>, 而由 Kolmogorov 建立了严密的数学基础<sup>[4]</sup>. 事实上, 伴随着 20 世纪 60 年代以来关于非线性系统的深入探索, 密度演化的思想获得了充分的重视, 即使在确定性非线性系统的研究中, 采用密度演化的描述亦可得到深刻的结果<sup>[3]</sup>.

在仅有初始条件具有随机性的场合, 随机动力系统状态的概率密度函数的演化服从 Liouville 方

程<sup>[1,3,5-7]</sup>. 当同时受到白噪声过程的激励时, 条件转移概率密度函数满足经典的 FPK 方程<sup>[1,8]</sup>. 可惜的是, 虽然经过人们不懈的努力<sup>[9]</sup>, 迄今为止, 多维随机动力系统 FPK 方程的求解还是相当困难的研究课题. 1957 年, Dostupov 和 Pugachev<sup>[10]</sup> 将随机过程的分解引入状态方程, 对具有随机激励的动力系统导出了含有随机参数的概率密度方程, 在形式上, 这一方程是含有参变数的 Liouville 方程. 循此路线, 原则上可以给出随机动力系统的状态概率密度函数及其演化过程. 与 FPK 方程相比, Dostupov-Pugachev 方程是一阶偏微分方程. 然而, 它仍然是高维偏微分方程, 无论是解析还是数值求解都会遇到极大的困难. 在这样的背景下, 为了实际应用的需要, 人们往往不得不退而求其次, 通过各种途径寻求随机动力系统二阶统计量的近似解答. 例如, 在工程随机力学中, 虽然对寻求非线性随机动力系统的概率密度函数解答进行了可贵的探索<sup>[9]</sup>, 但就一般情况而言, 无论是考虑激励随机性的经典随机振动理论<sup>[8,9]</sup>、还是在同时考虑系统参数与激励随

2005-06-28 收稿, 2005-09-05 收修改稿

\* 国家创新研究群体科学基金(批准号: 50321803)、国家杰出青年科学基金(批准号: 59825105)和国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 10402030)资助项目

E-mail: lijie@mail.tongji.edu.cn

机性的随机结构分析<sup>[11-13]</sup>，均以获取系统响应量的二阶统计量为主要目标。并且，即使限于二阶统计量，对非线性系统也还没有行之有效的求解方法<sup>[14,15]</sup>。

仔细考察研究者在寻求随机动力系统的概率密度函数解答中的努力可以发现<sup>[1,3-10]</sup>，在这些研究中，事实上都蕴涵了概率守恒的基本思想，即：为了建立系统状态的概率密度函数与“随机源”的概率密度函数之间的关系，利用了系统演化过程中状态空间的概率总量不变这一基本观念。然而，由于对这一原理没有进行深入的探讨，特别是没有从随机事件的角度考察，因而没有发现从一般多维随机动力系统导出一维密度演化方程的可能性。近年来，从密度演化的基本思想出发，本文作者初步发展了一类密度演化分析方法，在随机结构的动力反应与可靠度分析中取得了较为成功的研究进展<sup>[15-17]</sup>。在此基础上，本文试图对概率守恒原理进行较为深入的探讨分析，从状态空间和随机事件的角度考察概率守恒的本质，针对一般多维随机动力系统，导出一维的广义密度演化方程，从而建立密度演化分析的一般求解思路。作为典型应用，讨论了非线性随机结构响应分析问题。

### 1 经典 Liouville 方程与概率守恒原理的状态空间描述

为简明起见，首先考察具有随机初始条件、确定性算子的随机动力系统。不失一般性，设动力系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}(t) |_{t=t_0} = \mathbf{X}_0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{X}$  为  $n$  维状态向量， $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$  为确定性算子， $\mathbf{X}_0$  为初始值向量。若  $\mathbf{X}_0$  为具有概率密度函数  $p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0)$  的随机向量，则由状态方程(1)决定的  $\mathbf{X}(t)$  为随机过程。

记  $\mathbf{X}(t)$  的一维概率密度函数为  $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ ， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。考察状态空间中的任意区域  $D$ ，其边界为  $S$ 。在  $\Delta t$  时间内，区域  $D$  内的总概率增量为

$$\Delta P_D = \int_D p(\mathbf{x}, t + \Delta t) d\mathbf{x} - \int_D p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} =$$

$$\int_D \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} \Delta t + o(\Delta t), \quad (2)$$

这里  $o(\cdot)$  表示高阶无穷小。

与此同时，在  $\Delta t$  时间内通过边界  $S$  流入该区域的概率总量为

$$\Delta P_S = - \int_S p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{n}$  为边界外法线向量。

由(1)式可知  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \Delta t + o(\Delta t)$ ，代入(3)式并利用无源向量场的散度定理，可得

$$\begin{aligned} \Delta P_S &= - \left[ \int_S p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} ds \right] \Delta t + o(\Delta t) = \\ &= - \left\{ \int_D \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial [p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) A_j(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \right\} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (4)$$

由于在考察的时间内动力系统(1)中仅有初始条件具有随机性，此外没有新的随机因素引入，也没有随机因素消失，故必然有  $\Delta P_D = \Delta P_S$ ，将(2)，(4)式代入，并注意到  $D$  为任意区域，可得

$$\frac{\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial [p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) A_j(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_j} = 0. \quad (5)$$

(5)式即为经典 Liouville 方程，它描述了在给定的状态方程和随机初始条件下密度函数的演化过程，是一个密度演化方程<sup>[8]</sup>。这一方程最早在统计力学的研究中提出<sup>[1]</sup>。对于仅有初始条件具有随机性的随机动力系统，存在诸多导出经典 Liouville 方程的方法。例如，文献[10]中采用瞬时向量变换、文献[3]中采用 Frobenius-Perron 算子、文献[6]中根据积分常数理论、文献[5]利用特征函数方法，均导出了同一方程。在统计物理学与随机振动理论中，则往往将 Liouville 方程作为 FPK 方程在没有随机激励情况下的特例<sup>[1,8]</sup>。

在上述推导过程中，利用了  $\Delta P_D = \Delta P_S$  这一事实，即对于状态空间中的任意给定区域，通过边界流入与流出该区域的概率之和等于该区域内概率的增量。它是随机动力系统中概率守恒原理的表现形式之一。在一般意义上，概率守恒原理可以表述为

在保守的随机系统中,系统的概率守恒.这里所说的“保守”意义为:在所考察的时间范围内系统中不增加新的随机因素,也没有随机因素消失.

由于在上述讨论中对概率守恒原理的理解在状态空间中进行,不妨称之为概率守恒原理的状态空间描述(图 1(a)).不难看出,它与连续介质力学中 Euler 坐标系统描述相对应<sup>[18]</sup>.

## 2 概率守恒原理的随机事件描述与广义密度演化方程

### 2.1 概率守恒原理的随机事件描述

应该指出,迄今为止对于概率守恒原理的讨论限于初始条件具有随机性的动力系统,并且,由于是基于状态空间描述,因而没有实现状态方程与密度演化方程的解耦.由此导出的密度演化方程是一阶高维偏微分方程,很难求解,这极大地限制了密度演化思想的应用.事实上,概率守恒原理具有更为丰富的内涵,它不仅适用于仅有初始条件具有随机性的场合,还适用于初始条件、外部激励和系统参数均具有随机性的随机动力系统.

从随机事件的角度考察(如图 1(b)),在保守的随机系统中,随机事件在系统演化过程中既不会消失,也不会增加.事实上,若在系统演化过程中存在新加入的随机因素,总可以将其引入、并与已有随机因素一起、构成一个增广的保守随机系统加以统一考虑.例如,对于存在随机激励的随机系统,初看起来似乎系统的随机性是时变的,但是,若引用随机过程的分解,如 Karhunen-Loeve 分解,可以将随机过程转化为含有独立随机向量的级数表达<sup>[10,19]</sup>,这些分解出来的独立随机向量是时不变的.类似地,

随机场中的随机性亦可以通过独立随机向量加以反映<sup>[20]</sup>.因此,在一般的随机动力系统中,其随机性总是可以通过时不变的随机变量集合加以描述,这事实上是由随机过程或随机场的有限维概率分布函数描述和测度论描述的等价性所决定的.在下文中,若不特别指出,随机参数均按上述方式理解.这一事实,确保了通常的随机动力系统总可以转化为保守的随机系统进行考察.根据概率论中的测度论原理<sup>[21]</sup>,随机事件的时不变性意味着相应概率测度的不变性.显然,这一事实与连续介质力学中质量守恒定律的 Lagrange 坐标系统描述是类似的<sup>[18]</sup>.因此,可定义“物质导数” $\frac{D}{Dt}(\cdot)$ .若时刻  $t$  物理系统的状态为  $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Theta})^T$ ,记状态的联合概率密度函数为  $p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ ,则概率守恒原理的随机事件描述表明

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) d\Omega = 0, \quad (6)$$

其中  $\mathbf{X}$  为系统状态变量,  $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n_{\boldsymbol{\theta}}})$  为系统中的所有随机因素,  $n_{\boldsymbol{\theta}}$  为随机参数个数,  $\Omega_t$  为初始时刻为  $\Omega_0$  的区域经 Jacobi 变换在  $t$  时刻所确定的相应区域,  $\Omega_0$  是初始空间中的任意区域.

由 Reynolds 转换定理可知<sup>[18]</sup>, (6) 式等价于

$$\frac{\partial p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) A_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] + \sum_{j=1}^{n_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\partial}{\partial \theta_j} [p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) A_{\theta_j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] = 0. \quad (7)$$

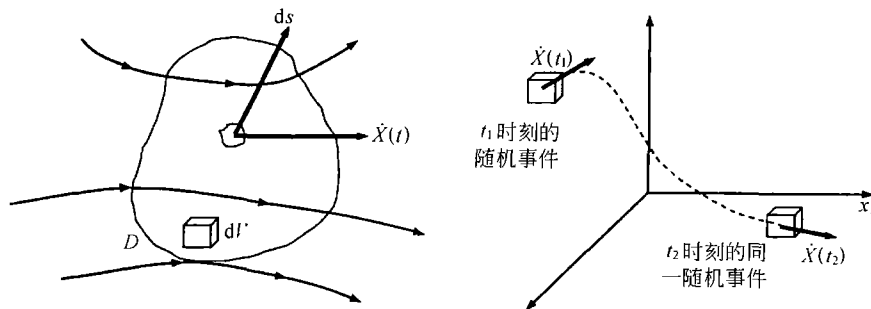


图 1 概率守恒原理的状态空间描述与随机事件描述

(a) 状态空间中的一个区域; (b) 一个特定的随机事件

根据上述讨论, 随机参数  $\Theta$  是时不变的, 即  $A_{\Theta,j} = \dot{\Theta}_j = 0$  ( $j=1, 2, \dots, n_{\Theta}$ ), 故(7)式简化为

$$\frac{\partial p_{x\Theta}(x, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{x\Theta}(x, \theta, t) A_j(x, \theta, t)] = 0. \quad (8)$$

与经典 Liouville 方程(5)相比, (8)式已经推广适用于更广泛的随机动力系统. 前已论及, 在该系统中的随机因素  $\Theta$ , 可以包括来自初始条件、动力系统参数和随机输入的随机性.

顺便指出, 文献[10]中亦导出了方程(8), 并给出了其解析解的形式表达. 尽管作者期望它“成为将来发展的新方法可能的出发点”, 然而, 自这一论文发表近 50 年来, 与之相关的研究进展甚微. 究其原因, 在于方程(8)仍然没有将状态方程与密度演化方程进行完全的解耦, 因而不得不面临高维偏微分方程的求解, 而这是相当困难、有时甚至是不可能的.

### 2.2 广义密度演化方程

从上述两个不同角度对概率守恒原理的描述显然将给出等价的结果. 然而, 由于不同的理解角度, 带来了解决实际问题的方便性. 特别是, 概率守恒原理的随机事件解释为解决前述困难问题提供了契机. 为此, 考虑随机动力系统

$$\dot{X} = G(X, \Theta, t), \quad (9)$$

其中  $\Theta$  为具有已知联合概率密度函数  $p_{\Theta}(\theta)$  的随机向量.

对于适定的确定性动力学系统, 状态方程(9)的解答存在、惟一, 且它必然是  $\Theta$  的函数, 亦即存在形式解答

$$X = H(\Theta, t), \quad (10)$$

其分量式可表达为

$$X_l = H_l(\Theta, t) \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

为书写简便起见, 以下略去分量下标  $l$ , 即将  $X_l$ ,  $H_l$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ) 直接写为  $X$ ,  $H$ .

在所考察的时间区段内, 事件  $\{\Theta = \theta\}$  乃是一个不变的随机事件, 在  $\{\Theta = \theta\}$  的条件下,  $X(t)$  必然等于  $H(\theta, t)$ , 而取任何其他值的概率均为零, 即  $\{X(t) = H(\theta, t) \mid \Theta = \theta\}$  的概率为 1. 因此,  $X(t)$  关于  $\{\Theta = \theta\}$  的条件概率密度函数可表达为

$$p_{x|\Theta}(x, t \mid \theta) = \delta(x - H(\theta, t)), \quad (12)$$

其中  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数.

(12)式对于任何  $t$  均成立, 且其概率测度不变. 换言之, (12)式本质上是概率守恒原理在随机事件角度的体现.

将(12)式两侧关于  $t$  求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{x|\Theta}(x, t \mid \theta)}{\partial t} &= \frac{\partial \delta(x - H(\theta, t))}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \delta(x - H(\theta, t))}{\partial x} \cdot \\ &\quad \left( \frac{\partial (x - H(\theta, t))}{\partial t} \right) = \\ &= -\dot{H}(\theta, t) \frac{\partial p_{x|\Theta}(x, t \mid \theta)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13)$$

根据条件概率公式,  $(X, \Theta)$  的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{x\Theta}(x, \theta, t) &= p_{x|\Theta}(x, t \mid \theta) p_{\Theta}(\theta) \\ &= \delta(x - H(\theta, t)) p_{\Theta}(\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

由(13), (14)式可得

$$\frac{\partial p_{x\Theta}(x, \theta, t)}{\partial t} + \dot{H}(\theta, t) \frac{\partial p_{x\Theta}(x, \theta, t)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

或更明确地

$$\frac{\partial p_{x\Theta}(x, \theta, t)}{\partial t} + \dot{X}(\theta, t) \frac{\partial p_{x\Theta}(x, \theta, t)}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

其中  $\dot{X}(\theta, t)$  为  $\{\Theta = \theta\}$  条件下  $X(t)$  的速度.

根据(14)式, 不难得到方程(16)的初始条件

$$p_{x\Theta}(x, \theta, t) \big|_{t=0} = p_{\Theta}(\theta) \delta(x - x_0), \quad (17)$$

其中  $x_0$  为  $X(t)$  的初始值.

求得偏微分方程初值问题(16)、(17)的解答之后,即可积分给出  $X(t)$  的瞬时概率密度函数

$$p_X(x, t) = \int_{\Omega_{\theta}} p_{x_{\theta}}(x, \theta, t) d\theta, \quad (18)$$

其中  $\Omega_{\theta}$  为  $\theta$  的分布区域.

关于上述推导及其结论,应该强调:

(1) 与经典的和含有参变数的多维 Liouville 方程(5)和(8)不同, (15)和(16)式是关于空间变量  $x$  的一维偏微分方程. 虽然在这里  $\dot{H}(\theta, t)$  或  $\dot{X}(\theta, t)$  的显式表达一般仍是未知的,但从下节的数值算法可见,其显式表达事实上并非必要. 这将使得一般的多维非线性随机动力系统的求解成为现实;

(2) 方程(16)适用于任意线性或非线性的随机动力系统的任意物理量. 它表明,随机动力系统状态概率密度的演化是由于相应状态自身的速度引起所“携带”的概率迁移的结果,而与其他分量无关. 因此,为了获取任意物理量的密度演化特征,只需获得相应的速度信息即可.

(3) 实现由多维 Liouville 方程(5)和(8)向一维偏微分方程(15)和(16)转化的关键,是对于物理解答的考察,而不是仍然从状态方程角度出发. 正是在物理解答(10)的意义上,实现了各个状态分量之间的解耦. 显然,该转化过程是精确的、具有广泛适用性的,而不是在特殊情况下的假定和近似. 这一事实,从常规的概率守恒原理的状态空间描述角度似乎难以理解,但从随机事件描述的角度则是明确而自然的:因为仅从状态分量的实际演化过程而非状态方程的角度来看,单个分量本身与随机参数一起构成一个保守的随机动力系统,将所有的状态分量耦合考虑并非构成概率保守系统的必要条件.

正是在上述意义上,可称(16)式为广义密度演化方程.

值得指出的是,利用同一随机事件状态方程解答与物理解答的等价性,亦可以从(8)式出发通过对高维偏微分方程进行积分导出(15)或(16)式,详见文献[16, 17].

### 3 密度演化方程的数值求解

如前所述,对于一般的动力系统,难以得到  $\dot{X}(\theta, t)$  的显式表达,因而广义密度演化方程(16)的显式解答是很难得到的. 虽然如此,可以对方程(16)方便地进行数值求解. 注意到在方程(16)中不含有关于  $\theta$  的偏微分项,即在(16)式中  $\theta$  事实上是作为一个参数而非变量存在,因此,求解式(16)时应首先取定参数  $\theta$  的值,进而获取系数  $\dot{X}(\theta, t)$ ,而这可以在给定  $\theta = \theta$  的情况下对状态方程(9)进行确定性分析得到. 根据上述求解过程中信息传递的关系,采用密度演化理论求解随机动力系统的基本步骤为:

(1) 在空间  $\Omega_{\theta}$  中选取离散代表点  $\theta_q$  ( $q=1, 2, \dots, N_{\text{sel}}$ ),  $N_{\text{sel}}$  为选取的离散点总数;相应地,进行初始条件的离散;

(2) 令  $\theta = \theta_q$ ,代入状态方程(9),进行确定性时程积分,给出  $\dot{X}(\theta, t)$  的数值解答  $\dot{X}(\theta_q, t_m)$ ,其中  $t_m = m \cdot \Delta t$  ( $m=1, 2, \dots$ ),  $\Delta t$  为时间离散步长;

(3) 将  $\dot{X}(\theta_q, t_m)$  代入广义密度演化方程(16),采用有限差分方法求解给出  $p_{x_{\theta}}(x, \theta, t)$  的数值解答  $p_{x_{\theta}}(x, \theta_q, t_k)$ ,这里  $x_j = x_0 + j \cdot \Delta x$  ( $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\Delta x$  为空间离散步长,  $t_k = k \cdot \Delta \hat{t}$ ,  $\Delta \hat{t}$  为差分时间步长;

(4) 对式(18)进行数值积分,给出  $p_X(x, t)$  的数值解答  $p_X(x_j, t_k)$ .

在步骤(1)中,选点规则是关系到计算工作量大小的关键. 在  $n_{\theta}=1, 2$  的场合,可以直接按照均匀网格划分的格栅型选点规则,当  $n_{\theta} \geq 3$  时,格栅型选点规则将导致过大的计算工作量,此时,需要对选点规则进行专门的研究. 采用新近发展的映射降维算法<sup>[22]</sup>和数论选点方法<sup>[23]</sup>,可以将  $n_{\theta}$  个随机变量时的随机动力系统的分析工作量降到与  $n_{\theta}=1$  时大体相当的水平. 限于篇幅,兹不赘述.

步骤(2)是常规的确定性动力系统时程分析过程,在计算数学和计算力学中已经发展多种有效的时程积分方法可资选用<sup>[18, 24]</sup>.

广义密度演化方程(16)是一个守恒型偏微分方程,在计算流体力学中对这类方程的数值求解算法进行了卓有成效的研究<sup>[25, 26]</sup>. 有限差分方法是其中

实施较为方便且具有良好精度的一种算法. 在差分格式中, Lax-Wendroff 格式是具有二阶精度的格式, 但它具有较明显的色散效应, 从而使得直接采用 Lax-Wendroff(L-W)格式计算的结果往往不能确保密度函数的非负性. 在此情况下, 在 Lax-Wendroff 格式中施加通量限制器, 可构成具有 TVD 性质的差分格式, 它具有较为理想的计算性能, 具体实施参见文献[15-17], 兹不赘述.

从上述步骤可见: 密度演化分析的基本过程是常规的确定性分析与有限差分方法的结合. 因此, 很容易在现有确定性系统分析程序的基础上实现密度演化分析功能的扩充.

上述数值算法构成了密度演化理论求解随机动力系统的一般过程.

#### 4 密度演化理论的应用

密度演化理论具有广阔的应用前景. 为简明起见, 这里仅以随机结构动力非线性反应分析为例加以说明.

在工程结构分析中, 同时考虑工程结构参数的随机性与激励的随机性, 对于准确地把握结构的性能、进行结构的可靠性评估是非常重要的<sup>[13]</sup>. 尽管自 20 世纪 60 年代末以来进行了大量的研究, 提出了随机模拟、随机摄动、正交展开等诸多方法<sup>[11-13]</sup>, 但迄今为止仅正交展开方法对求取线性结构动力响应的二阶统计量较为成功. 而对非线性结构响应特征的获取, 则尚无有效的途径<sup>[14]</sup>. 与此形成鲜明的对照, 采用密度演化分析可以方便地获取结构动力响应的概率密度函数及其演化过程<sup>[15-17]</sup>.

不失一般性, 非线性工程结构系统可离散为多自由度体系

$$M(\Theta)\ddot{X} + C(\Theta)\dot{X} + f(\Theta, X) = F(\Theta, t), \quad (19)$$

其中  $M, C$  分别为质量和阻尼矩阵,  $\ddot{X}, \dot{X}, X$  分别为加速度, 速度和位移向量,  $f$  为非线性恢复力向量,  $F$  为动力激励向量,  $\Theta$  为结构参数与激励中的随机参数, 其联合概率密度函数  $p_{\Theta}(\Theta)$  已知.

针对这一随机动力系统, 只需上节数值算法中步骤(2)求解状态方程(9)转换为求解动力方程(19), 即可采用相同的步骤进行密度演化分析.

为此, 考察一个典型的 10 层框架结构<sup>[16]</sup>. 其柱截面尺寸为 450 mm × 450 mm, 柱高  $h_1 = 4$  m,  $h = 3$  m. 从顶层向下各层的集中质量均值分别为 1.5, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.2 × 10<sup>5</sup> kg, 各层柱的弹性模量均值分别为 2.8, 2.8, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.25, 3.25, 3.25, 3.25 × 10<sup>10</sup> Pa. 集中质量和弹性模量均为正态分布的随机变量, 从顶层向下每两层的质量完全相关, 即每两层质量的随机性可以用同一个标准化随机变量表示. 弹性模量的分布类似. 质量和弹性模量的随机性共由 10 个标准化独立随机变量刻画, 其变异系数均为 0.2.

结构的层间恢复力采用连续可微、能够反映构件的强度退化、刚度退化和捏拢效应等典型非线性特性的 Bouc-Wen-Baber-Noori 模型<sup>[27,28]</sup>. 在此模型中, 共有 13 个基本参数, 其中  $\alpha$  为屈服后与屈服前的刚度比、 $A, \beta, \gamma, n$  为曲线基本形状参数、 $d_v$  为反映强度退化性质的参数、 $d_\gamma$  为反映刚度退化性质的参数、 $p, q, \psi, d_\psi, \lambda, \zeta$  为反映捏拢效应的参数. 根据参数灵敏度分析, 本文中  $\beta, \gamma, d_v, d_\gamma, \zeta$  为正态分布的独立随机变量, 其均值分别为  $\mu_\beta = 140, \mu_\gamma = 20, \mu_{d_v} = 200, \mu_{d_\gamma} = 200, \mu_{\zeta} = 0.95$  变异系数均为 0.3. 其余参数取确定性的值  $A = 1, n = 1, q = 0, p = 2500, d_\psi = 0.01, \psi = 0.003, \lambda = 0.003$ . 阻尼力采用 Rayleigh 模型,  $C = aM + bK_t, K_t$  为瞬时刚度矩阵, 取  $a = 0.01, b = 0.005$ .

随机地震动输入采用基于物理的地震动模型<sup>[1]</sup>. 该模型考虑了基岩地震动的不确定性和场地土条件的不确定性, 引入基岩地震动随机 Fourier 谱幅值参数  $F_0$ 、场地频率  $\omega_0$  与阻尼比  $\zeta_0$  作为独立随机参数, 通过对实际地震记录的分析识别, 采用对数正态分布, 其均值和变异系数分别取为  $\mu_{F_0} = 0.9, \mu_{\omega_0} = 25, \mu_{\zeta_0} = 0.7, \delta_{F_0} = 0.5, \delta_{\omega_0} = 0.4, \delta_{\zeta_0} = 0.3$ .

由上可知, 在本文的结构分析中共含有 18 个随机参数, 其中质量与刚度参数 10 个、恢复力模型中 5 个、随机地震动模型中 3 个.

1) 艾晓秋. 基于随机地震动模型的地下管线地震反应及抗震可靠度研究. 同济大学博士学位论文, 上海, 2005

图 2(a)为按照密度演化分析计算的均值和标准差,图中示出了采用 L-W 格式与采用 TVD 格式计算的结果.两种不同的差分格式给出一致的均值与标准差解答,但 TVD 格式能够避免所计算得到的概率密度函数出现负值.本例的密度演化分析中,采用数论方法并进行超球体筛选给出 208 个离散代表点,仅需时不到 200s,而采用常规的 Monte Carlo 模拟往往需要进行上万次甚至数十万次确定性分

析,其计算工作量是密度演化分析的百倍以上.与此同时,密度演化理论具有较高的精度<sup>[29,30]</sup>.不仅如此,密度演化分析还可以给出概率密度函数的解答及其演化进程.图 2(b)为典型时刻的概率密度函数,图 2(c)为概率密度函数随时间的演化曲面,图 2(d)为演化曲面的等概率密度线.由此可见,概率密度演化的过程实际上是非平稳的概率流动过程,而瞬时概率密度函数往往与正态分布等规则分布相去甚远.

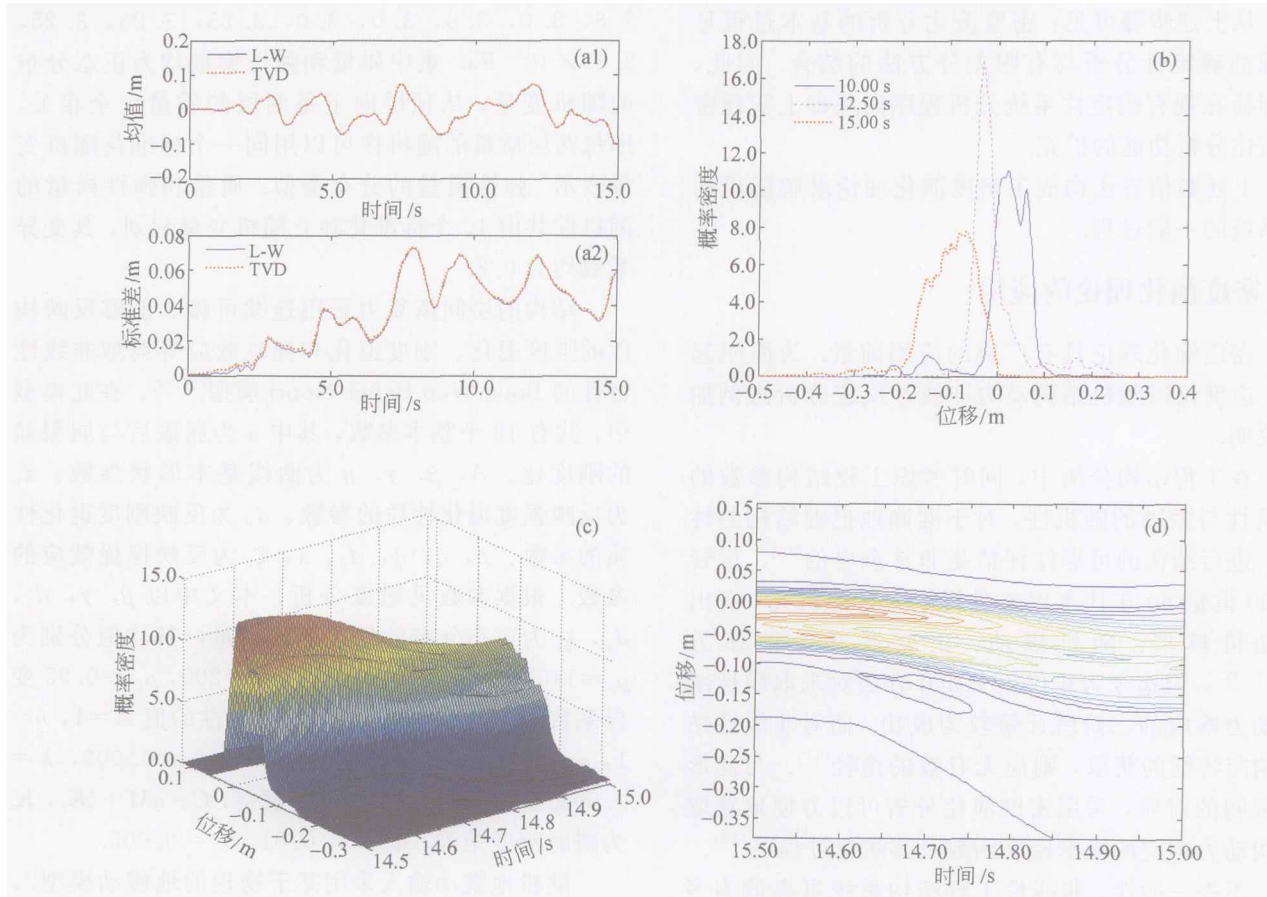


图 2 结构响应的概率信息

- (a) 均值与标准差(L-W 与 TVD 格式); (b) 典型时刻的概率密度函数;  
(c) 概率密度演化曲面; (d) 等概率密度线

## 5 结语

在具有随机初始条件和随机激励的动力系统中概率守恒,这一事实作为一个经典结论已为人所知.本文对这一原理进行了进一步探讨,考察了同时在初始条件、外部激励和系统特性中含有随机性的随机动力系统中的概率守恒问题.讨论了概率守恒原

理的状态空间描述和随机事件描述.在随机事件描述的基础上,导出了适用于很广范围内的随机系统的一维广义密度演化方程,从而为近年发展起来的密度演化分析方法建立了理论基础.通过非线性随机结构动力响应分析,给出了密度演化理论的应用实例.

参 考 文 献

- 1 Gardiner C W. *Handbooks of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (2nd edition). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985
- 2 Wang B, Barcion A, Fang Z. Stochastic dynamics of El Niño-Southern oscillation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1999, 56(1): 5—23
- 3 Lasota A, Mackey M C. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics* (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1994
- 4 柯尔莫哥洛夫 A N. 概率论的解析方法, 1931. 见: 伊藤清著, 刘璋温译. 随机过程. 上海: 上海科学技术出版社, 1961
- 5 Kozin F. On the probability densities of the output of some random systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, 28(2): 161—164
- 6 Syski R. Stochastic differential equations. In: Saaty T L, ed. *Modern Nonlinear Equations*, Chapter 8. New York: McGraw-Hill, 1967
- 7 Soong T T. *Random Differential Equations in Science and Engineering*. New York and London: Academic Press, 1973
- 8 Lin Y K, Cai G Q. *Probability Structural Dynamics: Advanced Theory and Application*. McGraw Hill College Div, 1995
- 9 朱位秋. 非线性随机动力学与控制. 北京: 科学出版社, 2003
- 10 Dostupov B G, Pugachev V S. The equation for the integral of a system of ordinary differential equations containing random parameters. *Automatikai Telemekhanika*, 1957, 18: 620—630
- 11 Ghanem R, Spanos P D. *Stochastic Finite Element: A Spectral Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- 12 Kleiber M, Hien T D. *The Stochastic Finite Element Method*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992
- 13 李 杰. 随机结构系统——分析与建模. 北京: 科学出版社, 1996
- 14 Anders M, Hori M. Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51: 449—478
- 15 李 杰, 陈建兵. 随机结构动力反应分析的概率密度演化方法. *力学学报*, 2003, 35(4): 437—442
- 16 李 杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化方法. *力学学报*, 2003, 35(6): 716—722
- 17 陈建兵, 李 杰. 非线性随机结构动力可靠度的密度演化方法. *力学学报*, 2004, 36(2): 196—201
- 18 Belytschko T, Liu W K, Moran M. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd., 2000
- 19 Loeve M. *Probability Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1977
- 20 Vanmarcke E. *Random Field*. MIT Press, 1983
- 21 Kolmogorov A N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933 (Reprint, 1973); *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, New York, 1956
- 22 李 杰, 陈建兵. 随机结构反应密度演化分析的映射降维法. *力学学报*, 2005, 37(4): 460—466
- 23 陈建兵, 李 杰. 结构随机反应概率密度演化分析的数论选点法. *力学学报*, 2006, 38(1): 134—140
- 24 Chapra S C, Canale R P. *Numerical Methods for Engineers* (3rd edition). McGraw-Hill, 1998
- 25 Anderson J D Jr. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1995
- 26 Shen M Y, Zhang Z B, Niu X L. Some advances in study of high order accuracy and high resolution finite difference schemes. In: Dubois F, Wu H M, eds. *New Advances in Computational Fluid Dynamics*. Beijing: Higher Education Press, 2001
- 27 Baber T T, Noori M N. Random vibration of degrading, pinching systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985, 111(8): 1010—1027
- 28 Ma F, Zhang H, Bockstedte A, et al. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 71: 342—349
- 29 Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters. *Computational Mechanics*, 2004, 34: 400—409
- 30 Chen J B, Li J. Dynamic response and reliability analysis of nonlinear stochastic structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20(1): 33—44